ЗАРУБІЖНИЙ ДОСВІД ПРОФЕСІЙНОЇ ПІДГОТОВКИ ФАХІВЦІВ

УДК 372.851
DOI 10.33251/2522-1477-2021-9-111-117

АЙВАЗЯН Эдвард Ишханович,
доктор педагогических наук, профессор,
преподаватель кафедры общей математики, ЕГУ,
Республика Армения

О ВОЗДЕРЖАНИИ ОТ ВОЗМОЖНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ОШИБОК В ПРОЦЕССЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ИЛИ ОПРОВЕРЖЕНИЯ

Логические ошибки допускают многие – от учеников до хорошо образованных людей. Обычно это происходит при доказательстве или опровержении своих или чужих мыслей. Данная статья посвящена диагностике возможных логических ошибок, допускаемых учащимися в процессе доказательства или опровержения утверждений и обоснованию необходимости разработке методических рекомендаций по их устранению.

Ключевые слова: *доказательство, опровержение, процесс доказательства, процесс опровержения, логическая ошибка, тез, основание, аргумент, аргументация, повтор, порочный круг, паралогизм, парадокс.*

Постановка проблемы. Многие люди, от учеников до хорошо образованных людей, оправдывая свои мысли и опровергая мысли других, делают логические ошибки. Лучший способ избежать этих возможных ошибок – развить логическую грамотность будущего гражданина.

Анализ последних исследований. Проблемой формирования логической грамотности учащихся занимались многие исследователи: Дж. Пойа, Ж. Пиаже, Ж. Ф. Асмус, А. А. Столяр, Н. Ф. Талызина, Г. А. Брутян, А. Копиллари, Я. С. Дубнов, Г. И. Саранцев, И. Л. Никольская, И. Л. Ананченко, К. О. Далингер, Ю. А. Бурлев и др. В основном исследователи перечисляют типы возможных ошибок. Некоторые из них, например, И. Л. Никольская предлагает развить логическую грамотность учащихся, т. е. будущих членов общества.

Цель статьи. Выявить типичные ошибки, которые допускают учащиеся при доказательствах или опровержениях математических утверждений и разработать методические рекомендации для их устранения.

Изложение основного материала исследования. В процессе доказательства или опровержения допускаются несколько категорий логических ошибок. Основываясь на подходах, которые мы использовали в этой статье, рекомендуется обсудить эти ошибки с точки зрения состава доказательства.

1.1 Логические ошибки, связанные с тезисом. Среди этих логических ошибок особо следует отметить, так называемые, *преображение* или *подмена тезиса*.

Преображение тезиса происходит тогда, когда вместо доказательства предложенного тезиса А доказывается аналогичный ему, но по существу отличающийся тезис А и заявляют, что тезис А доказан [1, с. 267].

Умышленные ошибки преображения тезисов часто встречаются в политике. Например, правительства некоторых стран, чтобы оправдать в глазах народа своей страны бесчеловечный, грабительский характер войны, тяжелое социально-экономическое положение людей, подлинную причину войны, все преступления взваливают на злодеяния соседних стран.

Подмену тезиса часто возможно более или менее замаскировать, потому что важную роль в доказательстве или опровержении тезиса обычно играет только одно единственное понятие, которому всегда легко найти внешне похожее понятие и, следовательно, легко этим похожим, но по сути отличным понятием подменить обсуждаемое понятие.

Например, много лет назад, к концу 1970-х годов, в Армянской ССР проводилась школьная олимпиада по математике. В одной из задач, предложенных 10-классникам, необходимо было доказать некоторую связь между количествами ребер, вершин и граней правильного многогранника». Один из учеников представил «решение» задачи следующим образом.

Поскольку требуется доказать это соотношение для произвольного правильного многогранника, то рассмотрим произвольный многогранник, например, куб. А затем, воспользовавшись существенными свойствами куба (что грани представляют собой 6 равных квадратов и т. д.), проверив верность требуемого неравенства, он пришел к выводу, что оно верно также для любого правильного многогранника. В этом примере термин «правильный многогранник» был ошибочно подменен термином «куб».

1.2 Логические ошибки, которые соприкасаются с основаниями.

а) **Основное заблуждение** (лат. error fundamentalis), или **ложное основание:** Эта логическая ошибка допускается тогда, когда в числе аргументов имеется хотя бы один ложный аргумент, принимаемый за истинный. Это довольно часто встречающаяся ошибка. Поэтому истинность аргументов всегда должна быть тщательно проверена.

Эту ошибку интерпретируем следующим математическим примером. Обозначим – 1+1 = a, 2 = b. Следовательно: a = b. Теперь умножим обе части последнего уравнения на a, получим: a^2 = ab.. Далее вычитав из обеих сторон данного уравнения одну и ту же величину - b^2, получим:

$$a^2 - b^2 = ab - b^2 \Leftrightarrow (a+b)(a-b) = b(a-b). \qquad (1)$$

Теперь сокращая обе части уравнения (1) величиной (a-b), получим – a+b=b, в котором восстанавливая начальные значения a и b, получим 1+1+2=2, то есть 4 = 2.

В чем причина этого неверного вывода? Какую ошибку мы сделали? Ответ на этот вопрос получим, если заметим, что мы сократили обе части уравнения (1) на величину a-b, которая фактически равна нулю, a-b = 0, а на 0 делить нельзя. В этом доказательстве был использован ошибочный аргумент, то есть было принято, что две части уравнения можно разделить на 0.

б) **Предвосхищение основания** (лат. petition principia – недоказанный аргумент, факт, основание). Эта логическая ошибка допускается тогда, когда в качестве довода используется положение, которое само нуждается в доказательстве, т. е. истинность которого вызывает сомнения. Это положение может быть как верным, так и ложным утверждением. И поскольку пока еще не решен вопрос верности этого основания, то оно по существу не может служить основанием для данного доказательства или опровержения.

Приведем один практический пример предвосхищения основания.

Приведем пример логической ошибки «недоказанного аргумента». До применения в Республике Армения машинной проверки вузовского вступительного экзамена экзаменационную работу абитуриентов проверяли преподаватели, входящие в состав экзаменационных комиссий. И один из абитуриентов обратился к автору моих строк, что за одну из решенных им задач комиссия поставила оценку на 0,5 балла меньше. Заявитель подал апелляционную жалобу, в результате которой председатель апелляционной комиссии разъяснил, что во время доказательства заявитель использовал аргумент: «Если «Если $2^x = 2^3$, то x = 3», что не доказано в школьных учебниках. И комиссия поступила правильно, уменьшив оценку данной задачи на 0,5 балла. Фактически, здесь заявитель использовал хорошо известное истинное основание в математике, но перед этим ему пришлось бы доказывать этот аргумент методом исключения.

в) Я часто полушутя, полусерьезно повторяю, что математика – это своего рода «сплетня» о трех основных математических фактах: аксиомах, теоремах и определениях. И в тех случаях, когда определение понятия используется в качестве основы в доказательстве, необходимо обратить внимание на корректность этого определения. Мы уже упоминали, что специалисты часто допускают два типа логических ошибок при формулировании определений: **повтор** (определение самого понятия с помощью этого же понятия: idem per idem) и **порочный круг** или **круговорот в определении**.

Пример 1. Если при доказательстве за основу было взято следующее определение понятия «решение уравнения» – «решение уравнения – это число, которое является его решением», то допущена логическая ошибка, называемая повтором (тождеством, тавтологией).

Пример 2. И если при доказательстве за основу были взяты следующие определения – «Окружностью называется край круга» и «Окружность – это часть плоскости, ограниченная окружностью, которой принадлежит центр окружности», то допущена логическая ошибка, которая называется **порочным кругом.** Порочный круг в доказательстве (лат. circulus in demonstrando) – используются аргументы, истинность которых вытекает из истинности доказываемого тезиса. Частный случай - тавтология в доказательстве (лат. idem per idem – то же через то же).

г) Одна из логических ошибок, связанных с основанием доказательства, – это круговое движение в демонстрационном порядке, более известное как «порочный круг». Эта логическая ошибка совершается при использовании аргумента В при доказательстве тезиса А, одним из необходимых оснований для доказательства которого является доказываемый тезис А.

Например, скажем, в курсе геометрии 7-ого класса (Л.С. Атанасян и другие) в доказательстве свойства равностороннего треугольника – «Медиана, проведенная к основанию равностороннего треугольника также является биссектрисой и высотой» в качестве аргумента используется третий признак равенства треугольников.

«Доказательство. Дан треугольник ABC с основанием BC и медианой AD. Доказать, что AD – биссектриса и высота. $\Delta ABD = \Delta ACD$ по третьему признаку. У них AB = AC, BD = CD по условию, а AD общая. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$… » (рис. 19) [2].

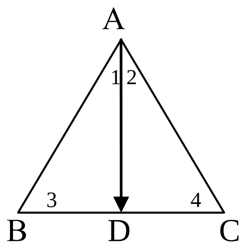

Рис. 19

1.3 Логические ошибки, связанные с аргументацией. Поскольку, с точки зрения аргументаций, каждое доказательство представляет собой цепочку умозаключений, следовательно этой группе принадлежат те ошибки, с которыми мы столкнулись при обсуждении видов умозаключений. Например, к числу подобных ошибок принадлежат, так называемые, правдоподобные умозаключения. Приведем примеры подобных ошибок.

1. Один из математиков в своей книге по математической логике приводит следующий интересный пример с правдоподобными рассуждениями.

На одном из заседаний Сената США один из сенаторов в своем выступлении выражает следующую озабоченность:

Все коммунисты нападают на меня.
Себастьян нападает на меня.
Следовательно: Себастян – коммунист.

Все засмеялись и проапплодировали. Один из присутствовавших на заседании сенаторов, математик, чтобы опровергнуть упомянутую правдоподобную, но неверную аргументацию, приводит следующий пример:

Все кролики любят морковь.
Себастян любит морковь.
Следовательно: Себастьян – кролик.

Сенаторы снова засмеялись и проапплодировали. И сенатору-математику пришлось объяснить, что и пример, приведенный предыдущим сенатором, и приведенный им пример, являются правдоподобными, но отнюдь не правдой. Рассуждать надо так:

Все коммунисты нападают на меня.
Себастьян – коммунист.
Следовательно: Себастян нападает на меня.

Причина правдоподобных рассуждений во многом связана с ненадлежащей логической подготовкой. Однако, часто методисты и авторы учебников сознательно допускают подобные ошибки в доказательствах, предлагая учащимся самостоятельно найти ошибки, допущенные в доказательствах. Конечно, бывают случаи, когда такие ошибки совершаются намеренно, чтобы ввести в заблуждение и убедить публику в чем то.

В методической литературе (например, [3]) и в учебниках (например, [5] – [7]) используется примечательный методический прием на формирование доказательных умений и навыков учащихся: направленное на нахождение сознательно допущенных в доказательствах – софизмов и, следовательно, на их исправление. Приведем пример такого упражнения!

2. «Найдите ошибку, допущенную в доказательстве.

$$16-36=25-45;$$
$$16-36+\frac{81}{4}=25-45+\frac{81}{4};$$
$$4^2-2\cdot4\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2=5^2-2\cdot5\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2;$$
$$\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2;$$
$$4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2};$$
$$4=5 .$$ [6; 262], № 1080.

Софизмы – это полезные задачи: хорошая возможность проверить правильность доказательства.

Известно, что для точности доказательства необходимо и достаточно, чтобы следующие два условия выполнялись одновременно.

1) Отправная точка доказательства: основой или первым шагом должно быть истинное предложение;

2) доказываемое утверждение должно вытекать из аргументов доказательства.

В приведенном выше примере не выполняется именно условие (2). Дело в том, что

$$\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2 \not\Rightarrow 4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2},$$

Следовательно, не вытекает то, что 4 = 5.

Добавим, что в неформальной логике циркулируют термины паралогизм, софизм, остроумие и парадокс.

Паралогизм – это та логическая ошибка, совершенная виновником ошибки без всякого намерения. Причина в достаточно низкой культуре. Например, во всех случаях, когда учащийся, не усвоив хорошо материал, допускает логическую ошибку при доказательстве теоремы или решении проблемы, он или она допускает ошибку паралогического характера.

Одна и та же логическая ошибка в одном случае может действовать как паралогизм и как софистика – в другом. Это зависит от того, была ли ошибка допущена намеренно или непреднамеренно. Последнее, в свою очередь, может иметь добрые намерения, например, исправление ошибок, допущенных в доказательствах, с образовательной целью и злонамеренно, то есть с целью ввести собеседников в заблуждение. В первом случае мы имеем дело с позитивной софистикой, а во втором – с негативной софистикой.

Можно сознательно, но не злонамеренно нарушить требование того или иного логического закона или правила всего лишь для **остроты**. А остроумие может иметь воспитательную цель, точно так же, как ее можно использовать для высмеивания темных сторон реальности и так далее.

Чтобы отличить изобретательность от изысканности, от паралогизма, нужно всегда обращаться к контексту материала.

Есть также соображения, содержащие логические противоречия, не попадающие в категорию паралогизмов или изобретательности. Примеры таких соображений (проблем) дошли до нас от древних греков. Такие соображения, которые не имеют решения, не являются ни истинными, ни ложными, называются **парадоксами**. Например, известны парадоксы цирюльника Ахилла, Рассела.

Хотя логика является основой всех других наук, интерес к ней был значительно обновлен открытием неевклидовой геометрии и поиском строгого обоснования анализа. Математическое общество, как говорится, не опомнилось, когда оно снова было шокировано открытием парадоксальных утверждений. Познакомимся с некоторыми из них.

А. Парадокс Рассела. Под множеством мы подразумеваем любой набор предметов. Например, набор арифметических цифр: {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}, кошек, химических элементов, атомных частиц, планет солнечной системы, классов животного мира, континентов. и т. д. Объекты, составляющие набор, называются его элементами, например, каждый из студентов, изучающих курс логики, является элементом этого набора. Большинство множеств не являются элементами самих себя. Например, множество котов – не кошка, толпа, поток студентов – не студент и так далее. Но возможны множества, которые являются элементом самого себя. Например, множество всех множеств. Рассмотрим теперь множество X тех множеств, которые не являются их элементом. Согласно определению, если А является элементом А, то А также не является элементом А; и наоборот, если А не является элементом А, то А является элементом А. Таким образом, в любом случае А является элементом А и А не является элементом А.

Б. Парадокс лжеца. Кто-то говорит. «Я лгу». Если он при этом лжет, то сказанное им – ложь, следовательно, он не лжет. Если он в данном случае не лжет, то сказанное им, правда, следовательно, он лжет. Так что в любом случае он одновременно лжет и не лжет.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Таким образом, мы рассмотрели три типа логических ошибок: ошибки, связанные с тезисом, ошибки, которые соприкасаются с основаниями и ошибки, связанные с аргументацией. Некоторые из них (например, софизмы) -полезные задачи и применяются в практике обучения для проверки правильности доказательства. А для воздержания от возможных ошибок в процессе доказательства или опровержения необходимо существенно повысить уровень логической грамотности учащихся, что одновременно предполагает необходимую исследовательскую работу в этом направлении.

Список использованнных источников

1. Брутян Г. А. Курс логики. Е.: Издательств ЕГУ, 1976. 507 с.
2. Геометрия 7 / Атанасян Л. С. и др.; Е.: «Зангак 97», 2006. 142 с.
3. Ананченко К. О. Обучение индуктивным и дедуктивным умозаключениям: в кн. «Преподавание алгебры в 6-8 классах». М.: «Просвещение», 1980. С. 186–203.
4. Асмус В. Ф. Учение логики о доказательстве и опровержении. М.: «Госполитиздат», 1954. 88 с.
5. Микаелян Г. С. Алгебра – 7. Е.: «Эдит Принт», 2006.
6. Микаелян Г. С. Алгебра – 8. Е.: «Эдит Принт», 2007.
7. Микаелян Г. С. Алгебра – 9. Е.: «Эдит Принт», 2008.
8. Никольская И. Л. Воспитание логической культуры при обучении алгебре в 6-8 классах: в кн. «Преподавание алгебры в 6 – 8 классах». М.: «Просвещение», 1980. С. 168–185.
9. Пиаже Ж., Инельдер Б. Генезис элементарных логических структур. Классификация и сериация. М.: «Иностранная литература», 1963. 448 с.
10. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: «Наука», 1975. 462 с.
11. Саранцев Г. И. Обучение математическим доказательствам в школе. М.: «Просвещение», 2000. 173 с.
12. Купиллари А. Трудности доказательств. М.: «Техносфера», 2002. 304 с.
13. Асмус В. Ф. Учение логики о доказательстве и опровержении. М.: «Госполитиздат», 1954. 88 с.
14. Дубнов Я. С. Ошибки в геометрических доказательствах. М.: «Наука», 1969. 64 с.
15. Плескунов М. А. Основы формальной логики. Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2014. 168 с.

References

1. Brutyan, G.A. (1976). Kurs logiki [*Study on Logic].* E.: Izdatelstv EGU, 507 s. [in Armenian].
2. Geometriya *[Geometry].* 7 / Atanasyan L. S. i dr.; E.: «Zangak 97», 2006. 142 s. [in Armenian].
3. Ananchenko, K.O. (1980). Obuchenie induktivnym i deduktivnym umozaklyucheniyam: v kn. "Prepodavanie algebry v 6-8 klassah". *[Teaching inductive and deductive reasoning, published in Teaching algebra in grades 6-8M].* "Prosveshenie», S. 18-203. [in Russian].
4. Asmus, V.F. (1954). Uchenie logiki o dokazatelstve i oproverzhenii *[The study of logic of proofs and refutations].* M.: "Gospolitizdat". 88 p. [in Russian].
5. Mikayelyan, H.S. (2006). Algebra – 7. Yerevan: "Edit Print". [in Armenian].
6. Mikayelyan, H.S. (2007). Algebra – 8. Yerevan: "Edit Print". [in Armenian].
7. Mikayelyan, H.S. (2008). Algebra – 9. Yerevan: "Edit Print". [in Armenian].
8. Nikolskaya, I.L. (1980). Cultivating logical culture in teaching algebra in grades 6-8, published in "Teaching algebra in grades 6-8". M.: "Prosveshcheniye", 168-185. [in Russian].
9. Piaget, J., Inhelder, B. (1963). Vospitanie logicheskoj kultury pri obuchenii algebre v 6-8 klassah *[The genesis of the elementary logical structures. Classification and seriation].* M.: "Inostrannaya literature", 448 p. [in Russian].
10. Polya, G., (1975). Matematika i pravdopodobnye rassuzhdeniya *[Mathematics and plausible reasoning].* M.: "Nauka", 462 p. [in Russian].
11. Sarantsev, G.I. (2000). Obuchenie matematicheskim dokazatelstvam v shkole *[Teaching mathematical proofs at school].* M.: "Prosveshcheniye", 173 p. [in Russian].
12. Cupillari, A. (2002). *[Trudnosti dokazatelstv].* Difficulty in constructing proofs. M.: "Tekhnosfera", 304 p. [in Russian].

13. Asmus, V.F. (1954). Uchenie logiki o dokazatelstve i oproverzhenii *[The study of logic of proofs and refutations]*. M.: "Gospolitizdat", 88 p. [in Russian].
14. Dubnov, Ya.S. (1969). Oshibki v geometricheskih dokazatelstvah *[Mistakes in geometric proofs]*. M.: "Nauka", 64 p. [in Russian].
15. Pleskunov, M.A. (2014). Osnovy formalnoj logiki *[Basics of the formal logic]*. Yekaterinburg: Ural University Publishing House, 168 p. [in Russian].

AYVAZYAN Edward, the Doctor of Pedagogical Sciences and the Professor of YSU.

EXCERPTS FROM POSSIBLE LOGICAL STEPS IN THE PROCESS OF PROVING OR PROVING

Abstract. *Logical fallacies are flaws in reasoning that are often committed by different people, be it school students or even well-educated people. This usually happens while trying to prove one's own thoughts or disproving the thoughts of others. The present article is dedicated to substantiating the need to detect logical fallacies made by learners in the process of proving and disproving mathematical statements, as well as to develop methodological guidelines for eliminating those errors.*

As we know, the "Logic" or, to be more precise, the "Formal Logic", is not considered a general education subject in secondary school, but it is studied at university, for example, in almost all the faculties of the Yerevan State University. Therefore, in both cases, in order to avoid possible logical fallacies, it is necessary to ensure a decent level of logical literacy among secondary school students and university students, or in other words, the future members of society.

This issue is especially relevant in the middle and high school. Actually, not only is the "Logic" absent from the secondary school curriculum, but its constituent parts are not explicitly studied either within Mathematics, Life Sciences or Social Studies curricula. And even if some logical rules are explicitly represented in different school disciplines, they, as a rule, have different names within different subjects. Poor schoolchildren first attend the Native language class, and then they rush to a Mathematics class and then end up at a History class. Within the Mathematics course, a logical rule is considered as an element of mathematical logic; within History course, the same rule is regarded as an element of historical mindset, and in the first case it is simply ignored. It is a pity that the real name of the logical rule in question is not presented at all.

Key words. *evidence, probation, process of evidence, process of probation, logical development, thesis, foundation, argument, argumentation, repetition, vicious circle, paralogism, paradox.*

Одержано редакцією: 28.12.2020 р.
Прийнято до публікації: 13.01.2021 р.